Estratto dalla *Rivista di Matematica* — Anno 1891, pag. 256-267.

Sul concetto di numero.

Nota II di G. PEANO.

Nella precedente nota si è analizzato il concetto di numero intero, e si sono esposte le proprietà fondamentali di questi numeri, in relazione alle operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione. Uno dei risultati cui pervenni si è che le questioni:

« Si può definire il numero, la somma di due numeri? »

« Si può dimostrare che la somma ha la proprietà commutativa? »

così enunciate, non ammettono soluzione scientifica. L'ammettono invece quando si enunciano sotto la forma:

« Si può definire il numero, mediante un dato sistema di idee? »

« Si può dimostrare una proprietà commutativa, mediante un dato sistema di proprietà? »

e la risposta dipende dal sistema di idee, o di proposizioni date.

Le stesse questioni ammettono pure soluzione nel campo pratico, ove si enuncino così:

« Si può definire l'idea di numero, mediante idee più semplici? »

« Si può la proprietà commutativa dedurre da proprietà più semplici? »

E a queste domande si possono dare dai varii autori differenti risposte, potendosi diversamente intendere la semplicità. Per mio conto la risposta alla prima si è che il numero (intero positivo) non si può definire (poichè le idee di ordine, successione, aggregato, ecc., sono altrettanto complesse come quella di numero) [1]. La risposta alla seconda questione è stata affermativa.

---

(1) Il Prof. R. BETTAZZI, nella sua opera *Teoria delle grandezze* (Pisa, 1890), opera già favorevolmente nota nel campo scientifico, giunge, a quanto pare, a un risultato diverso. Egli invero premette la teoria delle grandezze,

E ora continuiamo il rapido esame delle altre questioni dell'Aritmetica, continuando la numerazione dei §§ incominciata nella nota precedente.

§ 8. — Divisione.

Ci limiteremo alla sola definizione:

$$a \,\varepsilon\, \mathrm{n} \,.\, a -= 0 \,.\, b \,\varepsilon\, \mathrm{n} \times a : \supset . \, b/a = \mathrm{n}\, \overline{x \,\varepsilon}\, (ax = b) \qquad \text{[Def.]}$$

« Se a è un numero intero, non nullo, e se b è un multiplo di a, con b/a intendiamo il numero (intero) x tale che $ax = b$ ».

---

avvertendo più volte (pag. 9, pag. 11) che il concetto di numero si suppone *completamente ignoto;* e solo a pag. 65 introduce esplicitamente il concetto di numero, e a pag. 84 quello di numero intero e positivo. Ma invece il concetto di numero intero già comparisce più o meno esplicito nelle prime pagine del suo lavoro. Così a pag. 7 trovasi « un'operazione, la quale eseguita *su più oggetti* A, B,... d'una certa categoria... »; a pag. 9: « Se una grandezza è il risultato della operazione S eseguita su una grandezza A, *considerata più volte* »; a pag. 22: « Le classi ad una dimensione contengono un *numero infinito* di grandezze disuguali », e così via. Del resto il concetto di numero (N) è così semplice e fondamentale, che ritengo difficile il trovare un ragionamento un po' lungo, di qualunque siasi scienza, in cui esso non compaia.

Nell'appendice al suo lavoro, intitolata *Teoria analitica del numero*, l'A. dà, com'egli dice, solo un cenno del come si possano introdurre i numeri in modo puramente analitico. Introduce appunto, senza definirli, i tre concetti fondamentali di numero, di unità e di successivo d'un numero. Però non enuncia tutte le proprietà che questi enti debbono avere. Così non enuncia la legge di induzione (§2P5 della mia nota precedente), di cui si serve in seguito più volte.

Presenta gli stessi inconvenienti lo scritto dello stesso A., *Sul concetto di numero* (Periodico di matematica per l'insegnam. secondario, anno II). Invero, al n. 19, volendosi ottenere il numero intero positivo colla considerazione di *grandezze discrete*, cioè quelle che *risultano da aggregati di oggetti considerati uguali*, afferma che se ad ogni oggetto dell'aggregato A si può collegarne uno ed uno solo della classe B, e viceversa, non può avvenire che si possa far corrispondere ogni oggetto di A uno solo e distinto in B, in modo che ne avanzino in B.

Ora siffatta proposizione vale solo per le classi contenenti un *numero finito* di elementi, poichè per es. si può far corrispondere ai numeri interi (classe B) i loro doppi (classe A), e la classe A è contenuta in B, senza esserle uguale. Ed esaminando la dimostrazione dell'A. si vede che si ricorre a proposizioni su permutazioni, che sussistono solo trattandosi di oggetti in numero finito.

Ricordiamo che $\mathrm{n} \times a$ indica i multipli positivi e negativi, lo zero compreso, di a; invece $\mathrm{N} \times a$ indica i multipli positivi di a. Quindi la relazione « b è multiplo di a » si può esprimere coi segni introdotti scrivendo $b \varepsilon \mathrm{n} \times a$. Volendosi esprimere in simboli le proposizioni elementari della teoria dei numeri, converrà introdurre dei segni per indicare le frasi « massimo comun divisore » e « minimo comune multiplo ».

Delle notazioni proposte la più semplice è quella adottata dal compianto LUCAS, *Théorie des nombres,* 1891, pag. 345, il quale scrive:

D(a, b,...) per indic. « il massimo comun divisore dei numeri a, b,... »
e m(a, b,...) » « il minimo comune multiplo » »

Conviene ancora introdurre un segno per indicare la relazione « a è primo con b » (ch'io altrove indicai con $a \pi b$); e un segno per dire « numero primo », e sia Np. Per indicare la congruenza possiamo servirci della notazione di Gauss:

$$a \equiv b \quad (\mathrm{mod.}\ k),$$

ovvero, senza introdurre un segno nuovo, possiamo scrivere

$$a - b \,\varepsilon\, \mathrm{n} \times k\,, \quad a \,\varepsilon\, b + \mathrm{n} \times k.$$

Con questi pochi segni si possono esprimere quasi tutte le proposizioni della teoria dei numeri.

§ 9. — ENUMERAZIONE.

In questo § si analizzano alcuni concetti comuni, riducendoli a quelli finora studiati.

Essendo a una classe, con num a intenderemo « il numero degli individui della classe a ». Definiremo questo numero, e ne enuncieremo le proprietà.

Per semplificare le formule conviene poter scomporre il segno $=$, che esprime *è eguale,* nelle sue due parti, cioè *è*, che è indicato con ε, ed *eguale,* che indicheremo con ι (iniziale greca di *eguale*). Sicchè essendo a un individuo qualunque, ιa significa « eguale ad a » e rappresenta la classe degli enti eguali ad a; e la scrittura $b \varepsilon \iota a$ significa $b = a$.

Definizione di num a:

1. $a \varepsilon \mathrm{K} . \supset : \mathrm{num}\, a = 0 . = . a = \Lambda$
2. $a \varepsilon \mathrm{K} . m \varepsilon \mathrm{N} : \supset :: \mathrm{num}\, a = m . = .\because a - = \Lambda : x \varepsilon a . \supset_x .$
   $\mathrm{num}\,(a - \iota x) = m - 1$

« Essendo a una classe, dire che il numero degli a è 0 significa che la classe a è nulla ».

« Essendo a una classe, dire che il numero degli a è un numero m, significa che la classe a non è nulla, e che, preso ad arbitrio un individuo x nella classe a, il numero degli a non eguali ad x è $m - 1$ ».

Facendo, nella 2, $m = 1$, e tenendo conto della 1, si ottiene la definizione di num $a = 1$:

$$a \varepsilon K . \supset :: \text{num}\, a = 1 . = .\because a - = \Lambda : x \varepsilon a . \supset_x . a - \iota x = \Lambda, \quad \text{ovvero}$$
$$\text{»} \qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad . a \supset \iota x$$
$$\text{»} \qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad (y \varepsilon a . \supset_y . y = x)$$

che si trasforma in:

$$a \varepsilon K . \supset :: \text{num}\, a = 1 . = .\because a - = \Lambda : x, \ y \varepsilon a . \supset_{x, y} . x = y$$

« dire che il numero degli a vale 1, significa che la classe a non è nulla, e che se x e y sono individui della classe a, sarà $x = y$ ».

Facendo nella 2, $m = 2$, si ottiene la definizione di num $a = 2$, e così via.

Data una classe a non sempre num a è un N, poichè N non comprende nè lo zero, nè l'infinito. Quindi la proposizione num $a \varepsilon$ N significa « la classe a esiste effettivamente ed è finita, cioè contiene un numero finito di oggetti ».

Raccoglierò ora alcune proposizioni sull'enumerazione, affatto elementari, analizzandole onde tradurle in simboli.

3. $a, \ b \varepsilon K . \text{num}\, a, \ \text{num}\, b \varepsilon N . ab = \Lambda : \supset . \text{num}\, (a \cup b) = \text{num}\, a + \text{num}\, b.$

« Essendo a e b due classi non nulle e finite, non aventi alcun individuo comune, allora il numero degli individui appartenenti all'insieme delle due classi a e b vale la somma dei numeri degli a e dei b ».

La proposizione sussiste anche se num $a = 0$, o num $b = 0$. Essa sussiste pure se le classi contengono infiniti individui, purchè si facciano le solite convenzioni $x + \infty = \infty + x = \infty$; $\infty + \infty = \infty$.

4. $a, \ b \varepsilon K . b \supset a . b - = \Lambda . b - = a . \text{num}\, a \varepsilon N : \supset : \text{num}\, b \varepsilon N . \text{num}\, b < \text{num}\, a.$

« Se delle classi a e b la seconda è contenuta nella prima, e la classe b non è nulla, e non è eguale ad a, e se il numero degli a è finito, allora anche il numero dei b è finito, ed è minore del numero degli a ».

Questa proposizione cessa di sussistere se num $a = \infty$.

5. $m \varepsilon N . \supset . \text{num}\, [N \cap (m - N)] = m - 1$

« Essendo m un numero intero positivo, il numero dei numeri interi positivi, minori di m, è $m - 1$ ».

Vogliamo tradurre in simboli la proposizione seguente:

« Se si hanno p classi distinte, ciascuna delle quali contenga q individui, l'insieme di quelle classi conterrà $p \times q$ individui ».

Sarà a questo uopo conveniente introdurre la seguente notazione:

6. $u \varepsilon \mathrm{KK} . \supset . \smile' u = \overline{x \varepsilon} (x \varepsilon y . y \varepsilon u : - =_y \Lambda)$.

« Essendo u una classe di classi, ossia un sistema di classi, con $\smile' u$ (che si può leggere *la somma delle classi u*) si intende l'insieme degli x tali che esiste una classe y del sistema u, contenente l'x come individuo; cioè l'insieme degli x che sono individui di qualche classe del sistema u ».

Benchè pel nostro scopo immediato non ci occorra, può essere utile in altre ricerche indicare con un segno, e sia $\frown' u$ la classe comune alle classi del sistema, cioè il loro prodotto:

6'. $u \varepsilon \mathrm{KK} . \supset . \frown' u = \overline{x \varepsilon} (y \varepsilon u . \supset_y . x \varepsilon y)$

Tornando alla nostra questione, la proposizione enunciata diventa:

7. $u \varepsilon \mathrm{KK} . p, q \varepsilon \mathrm{N} . \mathrm{num}\, u = p : x \varepsilon u . \supset_x . \mathrm{num}\, x = q .\because. x, y \varepsilon s . x - = y : \supset_{x, y} . xy = \Lambda :: \supset . \mathrm{num} \smile' u = p \times q$

« Se u è una categoria di classi, e il numero delle classi della categoria u è p; e se qualunque si sia la classe x del sistema u, il numero degli x è costante ed eguale a q, e se prese ad arbitrio due classi x e y del sistema u, non identiche, esse non hanno alcun individuo comune, allora il numero di tutti gli individui delle classi del sistema u è $p \times q$ ».

Il segno « num » è un segno d'operazione che ad ogni classe fa corrispondere o un N, o lo 0, o l'∞; ossia

$$\mathrm{num}\, \varepsilon (\mathrm{N} \smile \iota 0 \smile \iota \infty) / \mathrm{K}$$

Esso si può invertire, e la relazione $\mathrm{num}\, a = p$ si può scrivere $a \varepsilon \overline{\mathrm{num}}\, p$, « la a è una classe contenente p individui ».

8. $a, b \varepsilon \mathrm{K} . f \varepsilon b | a . g \varepsilon a | b : \supset . \mathrm{num}\, a = \mathrm{num}\, b$.

« Essendo a, b due classi, se esiste una relazione f che ad ogni a fa corrispondere un b, e se esiste una relazione g che ad ogni b fa corrispondere un a, allora le classi a e b contengono lo stesso numero di oggetti ». Sussiste pure la proposizioue inversa, supposto che le classi considerate siano finite.

Se si enuncia però in generale la relazione:

9. $a, b \varepsilon \mathrm{K} . \supset :: \mathrm{num}\, a = \mathrm{num}\, b . = .\because. f \varepsilon b|a . g \varepsilon a|b : - =_{f, g} \Lambda$

« Le due classi a e b hanno lo stesso numero, se si può far corrispondere ad ogni a un b, e ad ogni b un a », allora può avvenire che

si abbia num $a = \infty$ e num $b = \infty$, senza che sia num a = num b; così si tocca la teoria delle varie potenze (Mächtigkeiten) del CANTOR.

Vogliamo ancora analizzare i concetti di *combinazione* e analoghi. Essendo s una classe, allora una combinazione degli s è precisamente una classe degli s. Quindi

$$Ks = (\text{combinazione degli } s).$$

Per indicare « combinazione degli s a k a k » possiamo quindi scrivere $(Ks)\overline{\text{num}\, k}$, cioè una classe degli s in numero di k.

Nei concetti di *disposizione* e *permutazione* sta racchiuso quello di *ordine*. Onde analizzarli indicheremo con Z_r, ove r è un intero, la classe dei numeri interi 1, 2,... r. Questa definizione di Z_r si traduce in simboli in questo modo:

$$10. \begin{cases} Z_1 = \iota\, 1 \\ r \,\varepsilon\, N \,.\, \text{ɔ} \,.\, Z_{r+1} = Z_r \cup \iota\,(r+1) \end{cases}$$

« Z_1 è la classe costituita dal solo numero 1; e se r è un numero, con Z_{r+1} intendiamo la classe che si ottiene dalla Z_r aggiungendovi ancora il numero $r+1$ ».

Allora, essendo s una classe di oggetti, le *disposizioni complete* di questi oggetti ad r ad r sono i varii modi con cui si può stabilire una corrispondenza fra i numeri Z_r e gli oggetti s; ossia

$$(\text{disposizioni complete degli } s \text{ a } r \text{ a } r) = s|Z_r$$

Per definire le disposizioni ordinarie, conviene introdurre il concetto di corrispondenza *simile* (per abbreviazione « sim »); porremo

$$11. \; a,\, b \,\varepsilon\, K \,.\, f \,\varepsilon\, b|a : \text{ɔ} :: f \,\varepsilon\, \text{sim} \,.\!\cdot\!.\, x,\, y \,\varepsilon\, a \,.\, x -= y : \text{ɔ}_{x,\,y} \,.\, fx -= fy.$$

« Essendo a e b delle classi, ed f una corrispondenza degli a nei b, allora si dice che questa è simile, se a due individui diversi della classe a corrispondono individui pure diversi ».

E allora si avrà:

$$(\text{disposizioni ordinarie degli } s \text{ a } r \text{ a } r) = (s|Z_r)\,\text{sim}.$$

Quindi le permutazioni dei numeri 1, 2, . . . r sono indicate da $(Z_r|Z_r)$ sim.

§ 10. — NUMERI RAZIONALI.

Essendo m e p, degli interi, e q un intero positivo (o almeno non nullo), se p è multiplo di q, supponiamo dimostrato che il prodotto $m \times (p|q)$ vale $(m \times p)|q$, ossia:

$$1. \; m,\, p \,\varepsilon\, n \,.\, q \,\varepsilon\, N \,.\, p \,\varepsilon\, n \times q : \text{ɔ} \,.\, m \times (p|q) = (m \times p)|q.$$

Quando invece p non è multiplo di q, la scrittura $m \times (p/q)$ non ha senso, non avendo senso la sua parte p/q; invece il secondo membro dell'eguaglianza può ancora avere significato, il che avviene se $m \times p$ è multiplo di q. In questo caso noi assumeremo quella eguaglianza come definizione del primo membro, ossia porremo

2. $m, p \varepsilon \mathrm{n} . q \varepsilon \mathrm{N} . p - \varepsilon \mathrm{n} \times q . m \times p \varepsilon \mathrm{n} \times q : \supset . m \times (p/q) = (m \times p)/q$ [Def.]

Così è definito il prodotto d'un intero per un'espressione della forma p/q, ove $p \varepsilon \mathrm{n}$ e $q \varepsilon \mathrm{N}$. Scriveremo R al posto di « numero razionale positivo », e r al posto di « numero razionale ». Avremo quindi:

3. $\mathrm{R} = \mathrm{N}/\mathrm{N}$; $\mathrm{r} = \mathrm{n}/\mathrm{N}$ [Def.]

Si può agevolmente dimostrare che « se a e b sono due numeri razionali, si può sempre determinare un intero m in guisa che i prodotti ma e mb siano numeri interi », cioè:

4. $a, b \varepsilon \mathrm{r} . \supset .\cdot. m \varepsilon \mathrm{N} . ma, mb \varepsilon \mathrm{n} : - =_m \Lambda$.

Due razionali a e b diconsi *eguali*, se qualunque si sia l'intero m, purchè ma e mb siano interi, si ha $ma = mb$:

5. $a, b \varepsilon \mathrm{r} . \supset .\cdot. a = b . = : m, ma, mb \varepsilon \mathrm{n} . \supset_m . ma = mb$.

Per definizione della somma $a + b$ di due razionali, ovvero dell'eguaglianza $a + b = c$, si può assumere « se, qualunque si sia l'intero m, purchè ma, mb ed mc siano interi, si ha $ma + mb = mc$ », ossia:

6. $a, b, c \varepsilon \mathrm{r} . \supset .\cdot. a + b = c . = : m, ma, mb, mc \varepsilon \mathrm{n} . \supset_m . ma + mb = mc$

E pel prodotto

7. $a, b, c \varepsilon \mathrm{r} . \supset .\cdot. ab = c . = : m, ma, (ma)b, mc \varepsilon \mathrm{n} . \supset_m . (ma)b = mc$.

Le altre operazioni si definiscono senza difficoltà.

Il concetto di frazione si ottiene in molte opere con considerazioni su grandezze concrete.

Volendo costituire l'analisi col solo concetto di numero intero, dice J. Tannery (*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, Paris 1886, pag. VIII) « une fraction ne peut pas être regardée comme « la réunion de parties égales de l'unité; ces mots *parties de l'unité* « n'ont plus de sens; une fraction est une ensemble de deux nom- « bres entiers, rangés dans un ordre déterminé; sur cette nouvelle « espèce de nombres il y a lieu de reprendre les définitions de l'éga- « lité, de l'inégalité et des opérations arithmétiques ». Veggasi pure: Meray, *Théorie élémentaire des fractions dégagée de toute considération*

impliquant soit la subdivision de l'unité abstraite, soit l'intervention des grandeurs concrètes (Nouvelles Annales de Mathém., 1889, p. 421).

Nelle formule precedenti la frazione p/q si è considerata come il segno dell'operazione « moltiplicare per p e dividere per q ». Quindi due frazioni p/q e p'/q' diconsi eguali, se eseguite le operazioni che esse indicano su uno stesso intero, producono risultati eguali.

Alcuni autori (1) definiscono l'eguaglianza di due fratti p/q e p'/q' mediante l'equazione $pq' = p'q$, la somma mediante la $p/q + p'/q' = (pq' + p'q) / (qq')$ ecc. Ma queste definizioni paionmi meno semplici.

Risulta dalle cose dette che la frazione p/q non è esattamente la coppia di numeri p, q; poichè due coppie p, q e p', q' sono identiche, quando $p = p'$ e $q = q'$. Bensì ad ogni coppia p, q si fa corrispondere un nuovo ente, indicato con p/q, e due di questi enti diconsi eguali quando soddisfano ad una certa condizione. Quindi la frazione è ciò che si ottiene per via d'astrazione dalle coppie di numeri, considerando le proprietà comuni alle coppie definite eguali.

Siffatto processo, con cui, data una classe di enti, si definisce su essi un'eguaglianza diversa dall'identità, e colle proprietà comuni ai varii enti definiti eguali si *crea* un nuovo ente, è assai comune in matematica.

Così dal fatto che la relazione di parallelismo di due rette gode delle proprietà dell'eguaglianza (V. *Formule di Logica matematica*, § 5, prop. 1, 2, 3; in questo volume a pag. 31), ad ogni retta si fa corrispondere un nuovo ente, chiamato *direzione* di essa, e due rette diconsi avere la stessa direzione se sono parallele. Ritroveremo questo processo nel § che segue.

§ 11. — Numeri reali.

Scriveremo Q invece di « numero reale positivo » e q invece di « numero reale determinato e finito ». Quindi q contiene i numeri razionali e irrazionali.

Fra i varii metodi per definire i numeri irrazionali, il più interessante, a mio avviso, è quello proposto dal Dedekind, nel suo opuscolo: *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (Braunschweig, 1872). L'idea del metodo è contenuta nel *Trattato d'Aritmetica* del Bertrand (V. la versione italiana del 1862, pag. 185); e forse si può rimontare ancora ad epoche anteriori, analizzando il concetto antichissimo di numero irrazionale.

---

(1) Stolz, *Vorlesungen über Arithmetik*, 1885, I, p. 43.

Il Dedekind dice (pag. 19): « Data una divisione del sistema R in « due classi, A_1 e A_2, aventi solamente la proprietà caratteristica che « ogni numero di A_1 è minore di ogni numero di A_2, noi per brevità « chiameremo questa divisione una sezione, e la indicheremo con « (A_1, A_2).

(Pag. 21). « Ora, se si ha una sezione (A_1, A_2), la quale non è « prodotta da alcun numero razionale, noi *creeremo* un nuovo numero, « un numero *irrazionale* α, che considereremo come completamente « definito da questa sezione (A_1, A_2) ».

In seguito definisce l'eguaglianza dei due numeri determinati dalle classi (A_1, A_2) e (A_1', A_2').

Analizziamo questo modo di *creare* (*erschaffen*) l'irrazionale, e traduciamolo in simboli di logica. Il dire che (A_1, A_2) è una sezione significa:

$$A_1, A_2 \varepsilon \mathrm{K} . A_1 -= \Lambda . A_2 -= \Lambda . A_1 \cap A_2 = \Lambda . A_1 \cup A_2 = \mathrm{R} .\cdot. \\ x \varepsilon A_1 . y \varepsilon A_2 : \supset_{x,y} . x < y$$

« A_1 e A_2 sono classi, non nulle, non aventi alcun individuo comune, formanti insieme la classe dei numeri razionali, e preso ad arbitrio un individuo x nella prima, ed uno y nella seconda, si ha $x < y$ ».

Ad ogni sezione (A_1, A_2) si fa corrispondere un ente, che l'autore chiama *numero definito da quella sezione*, e che io indicherò per un istante con $\mathrm{def}(A_1, A_2)$; si definisce quand'è che questo nuovo ente è eguale ad un numero razionale a:

$$a = \mathrm{def}(A_1, A_2) . = .\cdot. x \varepsilon A_1 . \supset_x . x \leqq a : y \varepsilon A_2 . \supset_y . y \geqq a$$

« Si dice che a è il numero definito dalla sezione (A_1, A_2), se ogni numero di A_1 è minore di a, e ogni numero di A_2 ne è maggiore, la diseguaglianza non esclndendo l'egnaglianza ».

Si definisce poi l'eguaglianza fra due di questi enti (A_1, A_2) e (A_1', A_2'):

$$\mathrm{def}(A_1, A_2) = \mathrm{def}(A_1', A_2') . = :: x \varepsilon A_1 . y \varepsilon A_2' : \supset_{x,y} . x \leqq y .\cdot. \\ x' \varepsilon A_2 . y' \varepsilon A_1' : \supset_{x',y'} . x' \geqq y'$$

« Si dice che le due sezioni (A_1, A_2) e (A_1', A_2') definiscono uno stesso numero, se ogni numero di A_1 è minore d'ogni numero di A_2', e ogni numero di A_2 maggiore d'ogni numero di A_1', la diseguaglianza non escludendo l'eguaglianza ».

In conseguenza il numero reale (razionale o irrazionale) è ciò che si ottiene per astrazione dalle sezioni, tenendo conto delle definizioni precedenti.

Invece di considerare amendue le classi A_1 e A_2, come già osservava il Dedekind, basta considerare p. e. la prima, A_1, poichè l'altra

A_2 è l'insieme degli R che non sono A_1, in simboli: $A_2 = - A_1$. E per semplicità si può supporre che la classe A_1 non abbia massimo. Così arriviamo alla definizione del PASCH, *Einleitung in die differential und integral Rechnung* (Leipzig 1882). Questi chiama *segmento* (*Strecke* o *Zahlenstrecke*) ogni classe di numeri razionali (effettivamente esistente), non contenente tutti i razionali, tale che se contiene un numero x, contiene pure tutti i suoi minori, e nou avente massimo. In simboli:

$$a \,\varepsilon\, (\text{Strecke}) \,.=::\, a \,\varepsilon\, \text{KR} \,.\, a -= \Lambda \,.\, a -= \text{R} \,.\!\cdot\!.\, x \,\varepsilon\, a \,.\, y < x \,.\supset_{x,y} .$$
$$y \,\varepsilon\, a \,.\!\cdot\!.\, x \,\varepsilon\, a \,.\supset:\, y \,\varepsilon\, a \,.\, y > x \,.-=_y \Lambda$$

In seguito sostituisce alla parola *segmento* la parola *numero* (Zahl), sicchè, secondo Pasch i numeri reali sono i segmenti di numeri razionali.

Una difficoltà di forma nell'esposizione del Pasch si trova ove dice senza alcun schiarimento precedente o seguente (pag. 4): « Se il segmento A è limitato dal numero (razionale) a, sarà $A = a$ ». Ora fra due enti di natura diversa, cioè fra una classe A di numeri, ed un numero a, non può sussistere una eguaglianza, ma solo che un ente è collegato all'altro. Noi nou possiamo affermare che il numero a sia identico al sistema A dei numeri di esso inferiori, ma solo che A è la classe degli R minori di a, o che a è ciò che limita A. Quindi per togliere quella difficoltà conviene di far corrispondere ad ogni segmento A un nuovo ente, che io indicherò con l'A (limite superiore degli A); e per indicare la relazione in questione si scriverà l'$A = a$. I numeri reali sono allora i *limiti superiori* dei segmenti.

Invece di considerare i limiti superiori delle classi particolari di R chiamati segmenti di numeri, possiamo parlare dei limiti superiori delle classi di R in generale, e la trattazione acquista, a mio modo di vedere, semplicità. Eccone alcuni cenni. Possiamo proporci di definire prima i numeri reali positivi Q, ovvero direttamente i numeri reali q. Seguiremo la seconda via.

Sia a una classe di numeri razionali (Kr), e sia x un numero razionale. Può avvenire che esistano numeri della classe a maggiori di x, cioè esistano numeri $a \frown (x + \text{R})$. Converremo di indicare questa relazione fra il numero x e la classe a scrivendo $x < \text{l}'a$, che si può leggere « x è minore del limite superiore degli a »:

1. $a \,\varepsilon\, \text{Kr} \,.\, x \,\varepsilon\, \text{r} :\supset: x < \text{l}'a \,.=.\, a \frown (x + \text{R}) -= \Lambda$ [Def.]

Risulta immediatamente che:

2. $a \,\varepsilon\, \text{Kr} \,.\, x, y \,\varepsilon\, \text{r} \,.\, x < y \,.\, y < \text{l}'a :\supset.\, x < \text{l}'a.$

Essendo a una classe di razionali, e b un numero razionale, diremo

che il limite superiore della classe a è il numero b, se ogni razionale minore del limite superiore degli a è minore di b, e viceversa:

3. $a \varepsilon \mathrm{Kr} . b \varepsilon \mathrm{r} : \supset :: \mathrm{l}'a = b . = .\because x \varepsilon \mathrm{r} . \supset_x : x < \mathrm{l}'a . = . x < b$

Per riconoscere l'eguaglianza fra i limiti superiori di due classi a e b si ha la regola:

4. $a, b \varepsilon \mathrm{Kr} . \supset :: \mathrm{l}'a = \mathrm{l}'b . = .\because x \varepsilon \mathrm{r} . \supset_x : x < \mathrm{l}'a . = . x < \mathrm{l}'b$

« I limiti superiori delle due classi a e b sono eguali, se ogni razionale minore dell'uno è pure minore dell'altro, e viceversa »; e questa regola si dimostra agevolmente se questi limiti superiori sono razionali, e si assume per definizione se irrazionali.

Essendo a e b due classi di razionali, $a + b$, com'è noto, indica l'insieme dei numeri che si ottengono sommando un numero qualunque della classe a con uno qualunque della classe b. Si ha:

5. $a, b \varepsilon \mathrm{Kr} . \supset . \mathrm{l}'(a + b) = \mathrm{l}'a + \mathrm{l}'b,$

formola che si deve dimostrare quando i limiti superiori sono razionali, e assumere per definizione nel caso contrario. Analogamente pel prodotto, e così via.

Gli enti ora introdotti col nome di limiti superiori delle classi di razionali, cioè l'Kr, sono appunto i numeri reali, q, compresovi il $+\infty$:

6. $a \varepsilon \mathrm{Kr} . \supset .\because \mathrm{l}'a = \infty . = : x \varepsilon \mathrm{r} . \supset_x . a \frown (x + \mathrm{R}) - = \Lambda$

e il $-\infty$, che si presenta quando $a = \Lambda$. Quindi

7. $\mathrm{q} = (\mathrm{l}'\mathrm{Kr}) (- \iota \infty) (- \iota - \infty)$

« I numeri reali sono i limiti superiori delle classi di razionali, esclusi il $+\infty$ e il $-\infty$ ».

Analogamente

8. $\mathrm{Q} = (\mathrm{l}'\mathrm{KR}) (- \iota \infty) (- \iota 0)$

I numeri reali si possono pure definire formalmente mediante una loro rappresentazione.

Data una successione indefinita di cifre (cioè dei numeri 0, 1, 2, ... 9), $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ a questa successione facciamo corrispondere un nuovo ente, che indicheremo con

$$0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots\ldots$$

e sopra questi enti definiremo le relazioni e operazioni in modo da farli coincidere colle frazioni decimali, la cui parte intera è 0. In tal modo, dare un numero reale equivale a dare la sua parte intera, e la legge che determina la serie delle sue cifre decimali.

La definizione dei numeri reali data dal Cantor (*Math. Ann.*, V, p. 123) parmi meno semplice delle precedenti.

Così ho esposto quei metodi di trattare i fondamenti dell'Aritmetica che, a mio avviso, sono migliori. Procurerò d'ora in avanti di tenere il lettore al corrente dei nuovi studii che si pubblicheranno su questo soggetto.

Nelle pagine precedenti moltissime questioni sono solamente accennate; le formule scritte contengono solo alcune delle proprietà delle operazioni studiate. Il mio scopo in certi punti fu di far puramente vedere come certe idee complesse si possano analizzare e decomporre in idee più semplici. Ma siffatte questioni a causa del loro interesse e dell'importanza che hanno, anche per l'uso scolastico, meritano di essere più profondamente esaminate; ed io raccomando vivamente agli studiosi questo genere di ricerche.

Sarebbe pure cosa utilissima il raccogliere tutte le proposizione note, che si riferiscono a certi punti della matematica, e pubblicare queste raccolte. Limitandoci a quelle dell'aritmetica, non credo si possa trovare difficoltà ad esprimerle in simboli logici; ed allora esse, oltre all'acquistare nella precisione, acquistano pure in concisione; e probabilmente le proposizioni riflettenti certi soggetti della matematica possono essere contenute in un numero di pagine non maggiore di quello che richiederebbe la loro bibliografia.

Il trasformare in simboli le proposizioni e le dimostrazioni espresse sotto la forma comune è spesso cosa facile. Ed è cosa facilissima ove si tratti delle proposizioni degli autori più accurati che già analizzarono le loro idee; basta nelle opere di questi autori sostituire alle parole del linguaggio comune i loro simboli equivalenti. La cosa presenta maggiori difficoltà in altri autori; qui occorre analizzare completamente le idee dell'autore, onde poterle tradurre in simboli; e non è raro il caso che una proposizione pomposamente annunziata non sia che una identità logica, o una proposizione precedente, o una forma priva di sostanza.

La *Rivista di Matematica* procurerà nel prossimo anno di pubblicare delle raccolte di questo genere; quindi invitiamo i lettori a comporne, e a volercene inviare.

Tip Guadagnini e Candellero, via Gaudenzio Ferrari, 3 - Torino